

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 1 февраля 2025 г., X класс

10.1. Пусть a, b и c действительные положительные числа, которые удовлетворяют следующим соотношениям $a^c = 625$, $b^c = 2025$, $b^a = 135\sqrt{5}$. Найдите a^a .

10.2. Определите все многочлены $P(X) \in \mathbf{R}[X]$, которые удовлетворяют соотношению

$$3(P(x) + 3x - 3) = 2x(P(2x) - 8x^2 + 5x), \text{ для любого } x \in \mathbf{R}.$$

10.3. Найдите действительные ненулевые числа a и b такие, что уравнение $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ имеет все решения целые числа.

10.4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне, а точки M и N являются серединами оснований BC и AD соответственно. Диагональ AC пересекает отрезок MN в точке T так, что $TM = 1 \text{ см}$ и $TN = 2 \text{ см}$. Вычислите площадь трапеции $ABCD$.

10.5. Найдите все действительные значения параметра m , при которых имеет место неравенство

$$mx^2 + y^2 - 2mx - 2y + 8x - 2m + 9 \geq 0, \text{ для любых } x, y \in \mathbf{R}.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 1 февраля 2025 г., X класс

10.1. Пусть a, b и c действительные положительные числа, которые удовлетворяют следующим соотношениям $a^c = 625$, $b^c = 2025$, $b^a = 135\sqrt{5}$. Найдите a^a .

10.2. Определите все многочлены $P(X) \in \mathbf{R}[X]$, которые удовлетворяют соотношению

$$3(P(x) + 3x - 3) = 2x(P(2x) - 8x^2 + 5x), \text{ для любого } x \in \mathbf{R}.$$

10.3. Найдите действительные ненулевые числа a и b такие, что уравнение $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ имеет все решения целые числа.

10.4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне, а точки M и N являются серединами оснований BC и AD соответственно. Диагональ AC пересекает отрезок MN в точке T так, что $TM = 1 \text{ см}$ и $TN = 2 \text{ см}$. Вычислите площадь трапеции $ABCD$.

10.5. Найдите все действительные значения параметра m , при которых имеет место неравенство

$$mx^2 + y^2 - 2mx - 2y + 8x - 2m + 9 \geq 0, \text{ для любых } x, y \in \mathbf{R}.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!