ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 1 февраля 2025 г., XI класс

11.1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точки $M \in (AB), N \in (BC)$ такие, что площади треугольников DAM, MBN и NCD равны $5, 3$ и 4, соответственно. Найдите все возможные величины площади прямоугольника $ABCD$.

11.2. Докажите, что множества действительных решений неравенств

$$2^x + 3^x - 11x \leq 2 \text{ и } (x^3 - 27) \cdot \log_{0.5}(x+1) \geq 0$$

совпадают.

11.3. Последовательность $(x_n)_{n\geq 0}$ такая, что $x_0 = 1$ и

$$x_{n+1} = \ln(1 + x_n),\ \forall n \geq 0.$$

Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

11.4. (a) Докажите, что существует расходящаяся последовательность действительных чисел $(a_n)_{n\geq 1}$ такая, что последовательность $(a_n \cdot \{\sqrt{n}\})_{n\geq 1}$ – сходящаяся.

(b) Докажите, что если последовательность действительных чисел $(a_n)_{n\geq 1}$ монотонна, а последовательность $(a_n \cdot \{\sqrt{n}\})_{n\geq 1}$ сходящаяся, тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

[$\{x\}$ обозначает дробную часть действительного числа x.]

11.5. В треугольнике ABC, $\measuredangle(A) = 90°$, $AB = 3$ и $AC = 4$. Найдите наименьшую возможную длину стороны равностороннего треугольника XYZ такого, что $X \in (AB), Y \in (BC), Z \in (CA)$.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.   ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 1 февраля 2025 г., XI класс

11.1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точки $M \in (AB), N \in (BC)$ такие, что площади треугольников DAM, MBN и NCD равны $5, 3$ и 4, соответственно. Найдите все возможные величины площади прямоугольника $ABCD$.

11.2. Докажите, что множества действительных решений неравенств

$$2^x + 3^x - 11x \leq 2 \text{ и } (x^3 - 27) \cdot \log_{0.5}(x+1) \geq 0$$

совпадают.

11.3. Последовательность $(x_n)_{n\geq 0}$ такая, что $x_0 = 1$ и

$$x_{n+1} = \ln(1 + x_n),\ \forall n \geq 0.$$

Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

11.4. (a) Докажите, что существует расходящаяся последовательность действительных чисел $(a_n)_{n\geq 1}$ такая, что последовательность $(a_n \cdot \{\sqrt{n}\})_{n\geq 1}$ – сходящаяся.

(b) Докажите, что если последовательность действительных чисел $(a_n)_{n\geq 1}$ монотонна, а последовательность $(a_n \cdot \{\sqrt{n}\})_{n\geq 1}$ сходящаяся, тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

[$\{x\}$ обозначает дробную часть действительного числа x.]

11.5. В треугольнике ABC, $\measuredangle(A) = 90°$, $AB = 3$ и $AC = 4$. Найдите наименьшую возможную длину стороны равностороннего треугольника XYZ такого, что $X \in (AB), Y \in (BC), Z \in (CA)$.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.   ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!