

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 5 februarie 2022, Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

12.1. Comparați:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2} dx \text{ și } \frac{\pi}{6}.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$I = \int_{-1}^0 \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2} dx =$ $= \int_{-1}^0 \frac{2x+5}{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2} dx =$	2 puncte
2.	$= \left \begin{array}{l} t = x^2 + 5x + 5 \\ dt = (2x+5)dx \\ x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 5 \end{array} \right =$	2 puncte
3.	$= \int_1^5 \frac{dt}{(t-1)(t+1)+2} = \int_1^5 \frac{dt}{t^2+1} dx = \arctg t \Big _1^5 = \arctg 5 - \arctg 1$	1 punct
4.	Obținerea $I = \arctg \frac{2}{3}$	1 punct
5.	Obținerea $I > \frac{\pi}{6}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.2. Dreptunghiurile $MNPQ$ și $ABCD$ sunt situate în două plane reciproc perpendiculare, astfel încât punctele M, N, A, D sunt coliniare și $MN = a, NP = b, AB = c, AD = d$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele MP și BD .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Identificare unghiului cerut printr-o construcție suplimentară, de exemplu prin construirea paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$, încât $AD_1 \parallel MP$	1 punct
2.	$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, unde $\alpha = m(\angle PMN)$	1 punct
3.	$C_1C = dtg \alpha$	1 punct

4.	$BC_1 = \frac{d}{\cos \alpha}$	1 punct
5.	$DC_1^2 = c^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$	1 punct
6.	Aplicarea teoremei cosinusurilor și obținerea $c^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = c^2 + d^2 + \frac{d^2}{\cos^2 \alpha} - 2\sqrt{c^2 + d^2} \cdot \frac{d}{\cos \alpha} \cos \beta$, unde $\beta = m(\angle DBC_1)$	1 punct
7.	$\cos \beta = \frac{d \cos \alpha}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{ad}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$ și obținerea măsurii unghiului cerut, egală cu $\operatorname{arccos} \frac{ad}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 + 43^{4042} & 43^{2021} + 47^{4042} & 47^{2021} + 1 \\ 1 + 43^{6063} & 43^{4042} + 47^{6063} & 47^{4042} + 1 \\ 1 + 43^{8084} & 43^{6063} + 47^{8084} & 47^{6063} + 1 \end{pmatrix}$.

Demonstrați că $\det A$ se divide cu numărul $2021^{2021} \cdot 2022$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\det A = \begin{vmatrix} 1 + 43^{4042} & 43^{2021} & 47^{2021} + 1 \\ 1 + 43^{6063} & 43^{4042} & 47^{4042} + 1 \\ 1 + 43^{8084} & 43^{6063} & 47^{6063} + 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + 43^{4042} & 47^{4042} & 47^{2021} + 1 \\ 1 + 43^{6063} & 47^{6063} & 47^{4042} + 1 \\ 1 + 43^{8084} & 47^{8084} & 47^{6063} + 1 \end{vmatrix}$	1 punct
2.	$\begin{vmatrix} 1 + 43^{4042} & 43^{2021} & 47^{2021} + 1 \\ 1 + 43^{6063} & 43^{4042} & 47^{4042} + 1 \\ 1 + 43^{8084} & 43^{6063} & 47^{6063} + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 43^{2021} & 47^{2021} + 1 \\ 1 & 43^{4042} & 47^{4042} + 1 \\ 1 & 43^{6063} & 47^{6063} + 1 \end{vmatrix} =$	1 punct
3.	$= \begin{vmatrix} 1 & 43^{2021} & 47^{2021} \\ 1 & 43^{4042} & 47^{4042} \\ 1 & 43^{6063} & 47^{6063} \end{vmatrix} = 2021^{2021} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 43^{2021} & 47^{2021} \\ 1 & 43^{4042} & 47^{4042} \end{vmatrix} =$ $= 2021^{2021} (43^{2021} - 1)(47^{2021} - 43^{2021})(47^{2021} - 1)$	1 punct
4.	$\begin{vmatrix} 1 + 43^{4042} & 47^{4042} & 47^{2021} + 1 \\ 1 + 43^{6063} & 47^{6063} & 47^{4042} + 1 \\ 1 + 43^{8084} & 47^{8084} & 47^{6063} + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + 43^{4042} & 47^{4042} & 1 \\ 1 + 43^{6063} & 47^{6063} & 1 \\ 1 + 43^{8084} & 47^{8084} & 1 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 43^{4042} & 47^{4042} & 1 \\ 43^{6063} & 47^{6063} & 1 \\ 43^{8084} & 47^{8084} & 1 \end{vmatrix} =$	1 punct
5.	$= 2021^{4042} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 43^{2021} & 47^{2021} & 1 \\ 43^{4042} & 47^{4042} & 1 \end{vmatrix} =$ $= 2021^{4042} (43^{2021} - 1)(47^{2021} - 43^{2021})(47^{2021} - 1)$	1 punct
6.	$2021^{2021} + 1$ se divide cu numărul 2022	1 punct
7.	$\det A = 2021^{2021} (2021^{2021} + 1) (43^{2021} - 1) (47^{2021} - 43^{2021}) (47^{2021} - 1)$ se divide cu numărul $2021^{2021} \cdot 2022$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.4. Determinați toate perechile de funcții derivabile (f, g) , $f, g: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât funcția $u: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \operatorname{tg}x \cdot f(x)$, este o primitivă a funcției g , iar funcția $v: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = \operatorname{tg}x \cdot g(x)$, este o primitivă a funcției f .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} (f + g)(x) + \operatorname{tg}x \cdot (f + g)'(x) = (f + g)(x) \\ \frac{1}{\cos^2 x} (f - g)(x) + \operatorname{tg}x \cdot (f - g)'(x) = -(f - g)(x) \end{cases}$	1 punct
2.	$\frac{1}{\cos^2 x} (f + g)(x) + \operatorname{tg}x \cdot (f + g)'(x) = (f + g)(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos x} (f + g)(x) \right)' = 0$	2 puncte
3.	$\frac{1}{\cos^2 x} (f - g)(x) + \operatorname{tg}x \cdot (f - g)'(x) = -(f - g)(x) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} (f - g)(x) \right)' = 0$	2 puncte
4.	$\begin{cases} f(x) + g(x) = C_1 \cos x, & C_1 \in \mathbb{R} \\ f(x) - g(x) = \frac{C_2 \cos x}{\sin^2 x}, & C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$	1 punct
5.	$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{\sin^2 x} \right), & C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{\cos x}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{\sin^2 x} \right), & C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.5. Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3 , astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)^2 = z_1 z_2 z_3$. Demonstrați că $(z_1 + z_2 + z_3)^{2021} = z_1^{2021} + z_2^{2021} + z_3^{2021}$.

Rezolvare 1 cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $ z_4 = 1$, unde $z_4 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$	1 punct
2.	Obținerea $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$	1 punct
3.	Obținerea $\begin{cases} q = 1 \\ z_1 = -q \end{cases}$, unde $\frac{z_4}{z_1} = \frac{z_2 z_3}{z_4} = q$, $q \in \mathbb{C}$	2 puncte
4.	Demonstrarea egalității pentru $q = 1$	1 punct
5.	Demonstrarea egalității pentru $z_1 = -q$	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Rezolvare 2 cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $ z_4 = 1$, unde $z_4 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$	1 punct

2.	Obținerea $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$	1 punct
3.	Obținerea $(z_2 + z_3)(1 - z_1)(z_1 + z_3)(1 - z_2)(z_1 + z_2)(1 - z_3) = 0$	2 puncte
4.	Demonstrarea egalității pentru $z_1 = 1$	1 punct
5.	Demonstrarea egalității pentru $z_1 + z_2 = 0$	1 punct
6.	Constatarea simetriei condițiilor și completarea demonstrației	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Rezolvare 3 cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $ z_4 = 1$, unde $z_4 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$	1 punct
2.	Obținerea $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$	1 punct
3.	Reprezentarea geometrică a numerelor complexe z_1, z_2, z_3 și $z_5 = -z_4$, prin vectori și și obținerea liniei frânte închise $ABCD$	2 puncte
4.	Obținerea că $ABCD$ – romb, inclusiv menționând cazul rombului ”degenerat”	1 punct
5.	Obținerea $z_2 = z_4, z_1 = -z_3$	1 punct
6.	Obținerea $z_4^{2021} - z_1^{2021} - z_2^{2021} - z_3^{2021} = 0$ și completarea demonstrației	1 punct
	Punctaj total	7 puncte