

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 4 februarie 2023, Clasa a XII – a
SOLUȚII

12.1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Calculați valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficul funcției f , de tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ și de dreapta $x = \sqrt{3}$.

Soluție.

Determinăm $f'(x) = -3x(1 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, de unde obținem că $y = 1$ este ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$.

Observăm că $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar „=” are loc doar pentru $x = 0$. Atunci aria figurii mărginite de graficul funcției f , de tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ și de dreapta $x = \sqrt{3}$ este

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \quad x \in [0; \sqrt{3}], \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \end{array} \right| = \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \sqrt{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t \, dt = \\ &= \sqrt{3} - \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Notă. Pentru calcularea integralei $\int_0^{\sqrt{3}} (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$ poate fi aplicată substituția Euler $\sqrt{x^2 + 1} = x + t$.

12.2. Unghurile plane de la vârful V al piramidei $VABC$ sunt de 90° . Ariile fețelor VAB și VAC sunt egale cu 3 cm^2 și respectiv 4 cm^2 . Unghiul diedru format de planele VBC și ABC este de 30° . Determinați aria bazei ABC .

Soluție. Considerăm punctul $M \in BC$, astfel încât $AM \perp BC$. Atunci $VM \perp BC$.

$AV \perp (BVC)$ implică $AV \perp VM$ și respectiv ΔAVM - dreptunghic în V .

Conform datelor problemei $m(\angle VMA) = 30^\circ$. Atunci

$AM = 2VA$.

Din datele problemei $\mathcal{A}_{AVB} = 3 \text{ cm}^2$

$$\Leftrightarrow VA \cdot VB = 6,$$

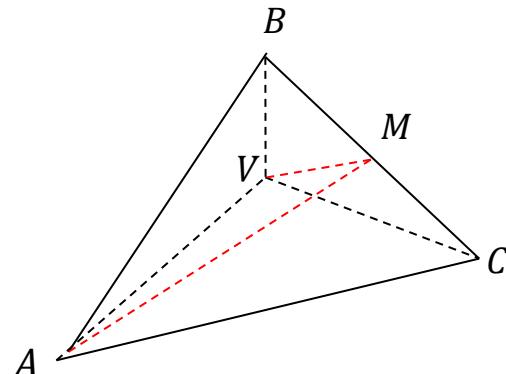
$$\mathcal{A}_{AVC} = 4 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow VA \cdot VC = 8.$$

Atunci

$$BC^2 = VB^2 + VC^2 = \left(\frac{6}{VA}\right)^2 + \left(\frac{8}{VA}\right)^2 = \frac{100}{VA^2}.$$

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM$, ceea ce implică

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{VA} \cdot 2VA = 10 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



12.3. Determinați numerele complexe z , pentru care $|z| = 2023$ și $|z^{2023} + (\bar{z})^{2023}| = 2023^{2023}$, unde \bar{z} este conjugatul numărului z .

Soluție. $|z| = 2023$ implică $z = 2023(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, unde $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Atunci $z^{2023} = 2023^{2023}(\cos(2023\varphi) + i \sin(2023\varphi))$, $(\bar{z})^{2023} = 2023^{2023}(\cos(2023\varphi) - i \sin(2023\varphi))$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6069} + \frac{k\pi}{2023}, k \in \{-2023, -2022, \dots, 2021, 2022\} \\ \varphi = -\frac{\pi}{6069} + \frac{k\pi}{2023}, k \in \{-2022, -2021, \dots, 2022, 2023\} \end{cases}$$

12.4. Fie funcția $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}$. Fie $F: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva funcției f , pentru care $F(2) = \ln \frac{2}{3}$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (F(2) + F(3) + \cdots + F(n)).$$

Soluție.

Putem scrie că $f(x) = \frac{4x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x} = \frac{4x+2}{(x^2-x)(x^2+3x+2)} = \frac{(x^2+3x+2)-(x^2-x)}{(x^2-x)(x^2+3x+2)} = \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Atunci $F(x) = \ln \frac{x-1}{x} - \ln \frac{x+1}{x+2} + C$. $F(2) = \ln \frac{2}{3}$ implică $C = 0$ și $F(x) = \ln \frac{x-1}{x} - \ln \frac{x+1}{x+2}$.

$$\begin{aligned}
 & F(2) + F(3) + \cdots + F(n) = \\
 & = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{4}{5} + \\
 & + \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{5}{6} + \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{6}{7} + \\
 & + \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{6}{7} - \ln \frac{8}{9} + \\
 & \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & + \ln \frac{n-4}{n-3} - \ln \frac{n-2}{n-1} + \ln \frac{n-3}{n-2} - \ln \frac{n-1}{n} + \\
 & + \ln \frac{n-2}{n-1} - \ln \frac{n}{n+1} + \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n+1}{n+2} = \\
 & = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2}.
 \end{aligned}$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (F(2) + F(3) + \dots + F(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} \right) = -\ln 3.$$

12.5. Determinați matricele X , pătratice de ordinul 2, elementele căroroare sunt numere întregi și pentru care

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solutie. Deoarece

$$X^4 - 3X^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X, \quad X^4 - 3X^3 = X \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ implică } X \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X.$$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci ultima egalitate este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a + 2b & -4b \\ -2c + 2d & -4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ 2a - 4c & 2b - 4d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = a - c \end{cases} \text{ ceea ce implică } X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci } X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ac - c^2 & (a - c)^2 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2c - 3ac^2 + c^3 & (a - c)^3 \end{pmatrix}.$$

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3 - 3a^2 & 0 \\ 3a^2c - 3ac^2 + c^3 - 6ac + 3c^2 & (a - c)^3 - 3(a - c)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2(a - 3) = -2 \\ (a - c)^2(a - c - 3) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3a^2c - 3ac^2 + c^3 - 6ac + 3c^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Am obținut că $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.