

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 1 februarie 2025, Clasa a XII-a

12.1. Determinați primitiva funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, care are valoarea minimă egală cu $\ln 2$.

12.2. Determinați toate numerele naturale nenule n , pentru care $\alpha^n + \beta^n = 2\gamma^n$, unde α, β, γ sunt soluțiile complexe ale ecuației $z^3 - 1 = 0$, luate într-o ordine oarecare.

12.3. Baza $ABCD$ a piramidei $VABCD$ este un paralelogram, în care $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm și $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Determinați măsura unghiului dintre muchia VC și diagonala BD a bazei, dacă $VA = 6$ cm, $VB = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ cm și $VC = 2$ cm.

12.4. Fie $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă ce verifică relația

$$f(x) + (x^2 + 1)f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(\ln x)}{x} = 0, \quad \forall x > 0.$$

Determinați toate primitivele funcției f .

12.5. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 1 & 2026 \end{pmatrix}$, iar $A^n = a_n A + b_n I_2$, unde $n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES !