

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 1 февраля 2025 г., XII класс

12.1. Найдите первообразную функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, которая имеет минимальное значение равное $\ln 2$.

12.2. Найдите все натуральные ненулевые числа n , при которых $\alpha^n + \beta^n = 2\gamma^n$, где числа α, β, γ являются комплексными решениями уравнения $z^3 - 1 = 0$, взятые в некотором порядке.

12.3. Основанием пирамиды $VABCD$ является параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $AD = 8$ см и $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Найдите величину угла между ребром VC и диагональю BD основания, если $VA = 6$ см, $VB = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ см и $VC = 2$ см.

12.4. Пусть $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция, для которой

$$f(x) + (x^2 + 1)f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(\ln x)}{x} = 0, \quad \forall x > 0.$$

Найдите все первообразные функции f .

12.5. Данна матрица $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 1 & 2026 \end{pmatrix}$. Пусть, $A^n = a_n A + b_n I_2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
Вычислите:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!