

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 года, VIII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. *Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.*

8.1. Действительные положительные числа x и y удовлетворяют равенству $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)(y+4)}$. Вычислите числовое значение выражения $E(x, y) = 2 \cdot \left(\frac{15}{xy-1} + \frac{15}{xy+1}\right)^{674}$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получил $4x + 4\sqrt{xy} + y = (x+1)(y+4)$.	1 балл
2.	Получил $xy - 4\sqrt{xy} + 4 = 0$.	1 балл
3.	Получил $(\sqrt{xy} - 2)^2 = 0$.	1 балл
4.	Получил $xy = 4$.	1 балл
5.	Получил $\frac{15}{xy-1} + \frac{15}{xy+1} = 8$.	1 балл
6.	Получил $E(x, y) = 2 \cdot (2^3)^{674}$.	1 балл
7.	Получил $E(x, y) = 2^{2023}$.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

8.2 Задан прямоугольный треугольник ABC с $m(\angle BAC) = 90^\circ$ и $AC = 15$ см. Точка D расположена вне треугольника ABC так, что прямая AD пересекает гипотенузу BC в точке E , а треугольник ADB является прямоугольным с $m(\angle ADB) = 90^\circ$, $AD = 16$ см, $BD = 12$ см. Найдите площадь треугольника ABE .		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Вычислил $AB = 20$ см.	1 балл
2.	Вычислил $BC = 25$ см.	1 балл
3.	Показал, что треугольники ADB и BAC подобны.	1 балл
4.	Из подобия получил равенства $m(\angle ABC) = m(\angle BAD) = \alpha$, $m(\angle ACB) = m(\angle ACE) = m(\angle CAE) = 90^\circ - \alpha$.	1 балл
5.	Показал, что треугольники ABE и ACE равнобедренные с $AE = CE = BE$, а точка E – середина гипотенузы BC .	1 балл
6.	За вывод, что медиана AE делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника ABE и ACE .	1 балл
7.	Вычислил площадь треугольника ABE : $S(\triangle ABE) = 75 \text{ см}^2$.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

8.3. Целые числа a и b удовлетворяют неравенству $|a + b| > |1 + a \cdot b|$. Покажите, что число $119 + a \cdot b$ делит число 2023. (Здесь через $|x|$ обозначена абсолютная величина действительного числа x .)

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Показал, что $ a + b > 1 + a \cdot b \Leftrightarrow (a + b)^2 > (1 + a \cdot b)^2$.	1 балл
2.	Получил соотношение $a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 1 < 0$.	1 балл
3.	Факторизовал левую часть данного неравенства $(a^2 - 1) \cdot (b^2 - 1) < 0$.	1 балл
4.	Получил, что $\begin{cases} a^2 < 1 \\ b^2 > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2 > 1 \\ b^2 < 1 \end{cases}$.	1 балл
5.	За вывод, что если $a, b \in \mathbb{Z}$, то $a \cdot b = 0$.	1 балл
6.	Получил, что $2023 = 7 \cdot 17^2 = 119 \cdot 17$.	1 балл
7.	Показал, что $119 + a \cdot b = 119$, которое делит число 2023.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

8.4. Докажите, что для любых натуральных чисел x, y ($x \geq 3, y \geq 3$) справедливо неравенство $x^2 y^2 - 144xy + 432(x + y) \geq 1296$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	За эквивалентное неравенство $x^2 y^2 - 144xy + 432(x + y) - 1296 \geq 0$.	1 балл
2.	За эквивалентное неравенство $x^2 y^2 - 144 \cdot (xy - 3x - 3y + 9) \geq 0$.	1 балл
3.	За эквивалентное неравенство $x^2 y^2 \geq 144 \cdot (x - 3) \cdot (y - 3)$. (*)	1 балл
4.	За эквивалентные соотношения $(t - 6)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 12t - 36$.	1 балл
5.	Для $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$ получил неравенства $x^2 \geq 12(x - 3) \geq 0$. (1)	1 балл
6.	Для $y \in \mathbb{N}, y \geq 3$ получил неравенства $y^2 \geq 12(y - 3) \geq 0$. (2)	1 балл
7.	Из (1) и (2) вывел, что неравенство (*) справедливо.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

8.5. Некоторый калькулятор может выполнять над любым рациональным числом r любое из следующих четырех действий: $2r$, $\frac{r}{2}$, $3r + 1$ или $\frac{r-1}{3}$.

а) Покажите, что начиная с натурального числа 2023, можно выполнить последовательно не более девяти из перечисленных действий так, чтобы конечный результат был равен 1.

б) Покажите, что начиная с любого целого числа n , можно выполнить последовательно не более шести из перечисленных действий так, чтобы конечный результат был равен $n - 1$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Привел последовательность из не более девяти действий над натуральным числом 2023, которая приводит к конечному результату 1.	3 балла.
	В частности: За полученную последовательность с числом действий большим, чем девять, которая приводит к конечному результату 1, дается 1 балл.	
2.	Привел последовательность из не более шести действий над целым числом n , которая приводит к конечному результату $n - 1$.	4 балла
	В частности: За полученную последовательность с числом действий большим, чем шесть, которая приводит к конечному результату $n - 1$, дается 1 балл.	
	Общее количество баллов	7 баллов